

Задача 75. Пусть прямое произведение $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ непустых множеств. Доказать, что класс множеств, каждое из которых можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников является алгеброй.

Доказательство:

Назовем класс множеств, каждое из которых можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся прямоугольника, – классом A_n . Необходимо доказать, что класс A_n является алгеброй. Нетрудно видеть, что он содержит объединение и пересечение любых двух своих элементов, а также $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ и $\emptyset$. Осталось доказать, что класс A_n замкнут относительно операции дополнения. Для этого достаточно доказать, что дополнение любого измеримого прямоугольника принадлежит A_n , т.к. $\left(\bigcup_{r=1}^m \prod_{k=1}^n A_k^{(r)}\right)^c = \bigcap_{r=1}^m \left(\prod_{k=1}^n A_k^{(r)}\right)^c$. Тот факт, что класс A_n содержит дополнение любого измеримого прямоугольника докажем с помощью математической индукции. Если $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$, то $(A \times B)^c = (A \times B^c) \cup (A^c \times \Omega_2) \in A_2$. Пусть $A_k \in \mathcal{F}_k, k = \overline{1, n}$. Предположим, что $(\prod_{k=1}^{n-1} A_k)^c$ принадлежит A_{n-1} . Тогда $(\prod_{k=1}^n A_k)^c = (\prod_{k=1}^{n-1} A_k \times A_n^c) \cup ((\prod_{k=1}^{n-1} A_k)^c \times \Omega_n) \in A_n$.